Städt. Abendgymnasium München

Aufgabenbeispiele zur Aufnahmeprüfung Mathematik 2.Klasse

Die folgenden Aufgaben sind Musterbeispiele für die Aufnahmeprüfung. Sie stellen nur eine Auswahl von möglichen Aufgabentypen dar. Der Gesamtumfang der hier vorgestellten Aufgaben übersteigt den Zeitrahmen von 60 Minuten für die Prüfung. Bei der Aufnahmeprüfung beträgt der Umfang ca. 5 bis 7 Aufgaben aus verschiedenen Gebieten (Algebra, Geometrie, Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung). Als Hilfsmittel ist in der Aufnahmeprüfung ein für das Gymnasium zugelassener Taschenrechner und das „Dokument mit mathematischen Formeln“ erlaubt.
Dieses Dokument kann über folgende Adresse heruntergeladen werden:

`https://www.isb.bayern.de/fileadmin/user_upload/Gymnasium/Faecher/Mathematik/Hilfsmittel/formeldokument.pdf`

Aufgabe 1

Gegeben ist die quadratische Funktion

$f : x \mapsto x^2 + 8x + 23$

Bestimmen Sie durch quadratische Ergänzung die Gleichung der zugehörigen Parabel in Scheitelpunktform und geben Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts S an.

Aufgabe 2

Unter 200 befragten Jugendlichen treiben 150 regelmäßig in der Freizeit Sport. 40 spielen ein Musikinstrument. Unter diesen Jugendlichen sind 18, die sogar beides tun.

a) Stellen Sie die zugehörige Vierfeldertafel auf!

b) Berechnen Sie, wieviele der Jugendlichen Sport treiben, ohne ein Musikinstrument zu spielen.

c) Berechnen Sie, wieviele der Jugendlichen Sport treiben oder ein Musikinstrument spielen.

d) Berechnen Sie, wieviele der Jugendlichen entweder Sport treiben oder ein Musikinstrument spielen.

Aufgabe 3

Ein Würfel wird einmal geworfen. Das Ergebnis ist die Augenzahl.

Somit ist die Ergebnismenge $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Betrachtet werden die Ereignisse

$G =$ „gerade Augenzahl“

$K = \{1; 2\}$

$P =$ „Augenzahl ist prim“ $= \{2; 3; 5\}$

a) Geben Sie das Ereignis G als Menge an.

b) Geben Sie das Ereignis $G \cup P$ als Menge an.

c) Geben Sie das Ereignis $G \cap \overline{K}$ als Menge an.

Aufgabe 4

Von den 120 Mitgliedern eines Sportvereins haben 50 das Deutsche Sportabzeichen, 25 das Bayerische Sportabzeichen und 15 beide Sportabzeichen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mitglied das das Deutsche Sportabzeichen besitzt, auch das Bayerische Sportabzeichen besitzt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mitglied das das Bayerische Sportabzeichen besitzt, auch das Deutsche Sportabzeichen besitzt?

Aufgabe 5

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ (γ, also gamma, ist der Winkel bei C) gilt:

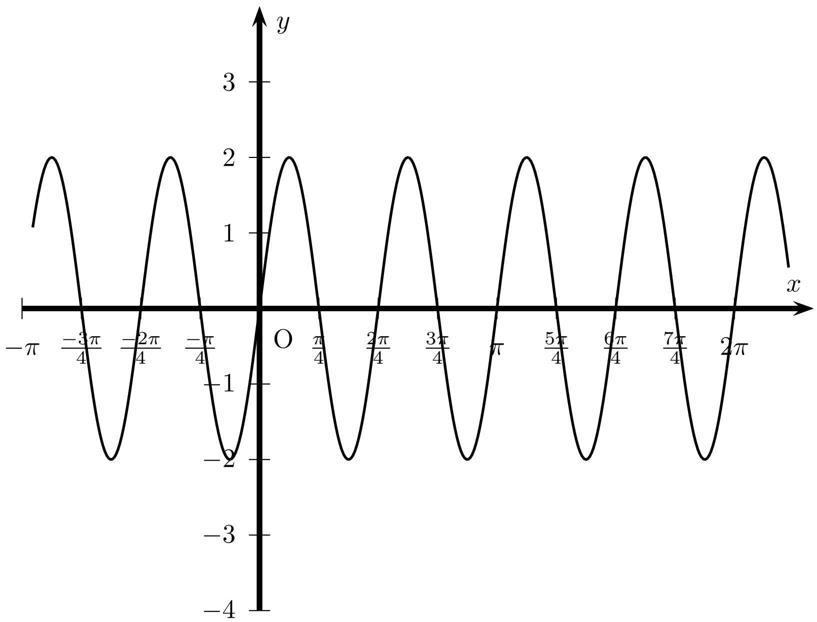
a) Es ist $\alpha = 35°$ und $c = 3$.
Berechnen Sie a.

b) Es ist $\alpha = 24°$ und $a = 5$.
Berechnen Sie c.

Aufgabe 6

Skizziert ist der Graph einer Funktion $f : x \mapsto a \cdot \sin(bx)$

Bestimmen Sie die Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$.



Aufgabe 7

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$f : x \mapsto -2 \cdot \sin(3x)$

im Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$

und geben Sie die Nullstellen der Funktion an.

Wählen Sie zum Zeichnen folgenden Maßstab:
x-Achse : 6 cm in der Zeichnung entspricht 2π
y-Achse : 1 cm in der Zeichnung entspricht 1

Aufgabe 8

Eine Bakterienkultur wächst exponentiell, d.h. für die Anzahl der Bakterien $N(t)$ zur Zeit t gilt: $N(t) = N_0 \cdot b^t$ mit einer Zahl b, wobei N_0 die Anzahl der Bakterien zur Zeit $t = 0$ ist. t wird in der Einheit Stunde gemessen.
Die Anzahl der Bakterien verzehnfacht sich alle 6 Stunden.
Berechnen Sie, um wie viel Prozent (auf 1 Nachkommastelle gerundet) die Anzahl der Bakterien innerhalb einer Viertelstunde zunimmt.

Aufgabe 9

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2x^2 - x}$

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_f, die Nullstellen und die Gleichungen der senkrechten Asymptoten von f.

Aufgabe 10

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto 4x^3 + 5x^2 - 6x$$

mit Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a) Untersuchen Sie durch Rechnung G_f auf Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems.

b) Bestimmen Sie durch Rechnung die Nullstellen von f und die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

c) Untersuchen Sie durch Rechnung das Verhalten von G_f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$.

d) Untersuchen Sie durch Rechnung das Monotonieverhalten von f sowie Art und Lage der Extrempunkte von G_f (gerundete y-Werte genügen).

e) Untersuchen Sie durch Rechnung G_f auf Wendepunkte und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

f) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente von G_f

im Punkt $P(-2|f(-2))$.

g) Skizzieren Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen von f im Intervall $[-3; 2]$ für y-Werte

im Bereich $-10 \leq y \leq 10$. Maßstab: Längeneinheit 1 cm.

Lösungen

Aufgabe 1

$f : x \mapsto x^2 + 8x + 23$

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 8x + 23 \\ y &= x^2 + 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 23 \\ y &= x^2 + 8x + 4^2 - 4^2 + 23 \\ y &= (x+4)^2 - 16 + 23 \\ y &= (x+4)^2 + 7 \end{aligned}$$

Scheitelpunkt $S(-4|7)$

Aufgabe 2

a) $S :=$Sport

$M :=$Musikinstrument

	M	$\overline{M}$	
S	18	132	150
$\overline{S}$	22	28	50
	40	160	200

b) $|S \cup \overline{M}| = 132$

c) $|S \cup M| = 18 + 132 + 22 = 172$

oder: $|S \cup M| = |\Omega| - |\overline{S} \cup \overline{M}| = 200 - 28 = 172$

d) $132 + 22 = 154$

Aufgabe 3

a) $G = \{2; 4; 6\}$

b) $G \cup P = \{2; 3; 4; 5; 6\}$

c) $G \cap \overline{K} = \{4; 6\}$

Aufgabe 4

$D =$ „Mitglied hat das Deutsche Sportabzeichen“

$B =$ „Mitglied hat das Deutsche Sportabzeichen“

a) $P_D(B) = \dfrac{|D \cap B|}{|D|} = \dfrac{15}{50} = 30\%$

b) $P_B(D) = \dfrac{|D \cap B|}{|B|} = \dfrac{15}{25} = 60\%$

Aufgabe 5

a) geg.: $\alpha = 35°$ und $c = 3$

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{c} \\ c \cdot \sin\alpha &= a \\ a &= c \cdot \sin\alpha \\ a &= 3 \cdot \sin 35° \\ a &\approx 3 \cdot 0,57 \\ a &\approx 1,72 \end{aligned}$$

b) geg.: $\alpha = 24°$ und $a = 5$

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{c} \\ c &= \frac{a}{\sin\alpha} \\ c &= \frac{5}{\sin 24°} \\ c &\approx \frac{5}{0,41} \\ c &\approx 12,29 \end{aligned}$$

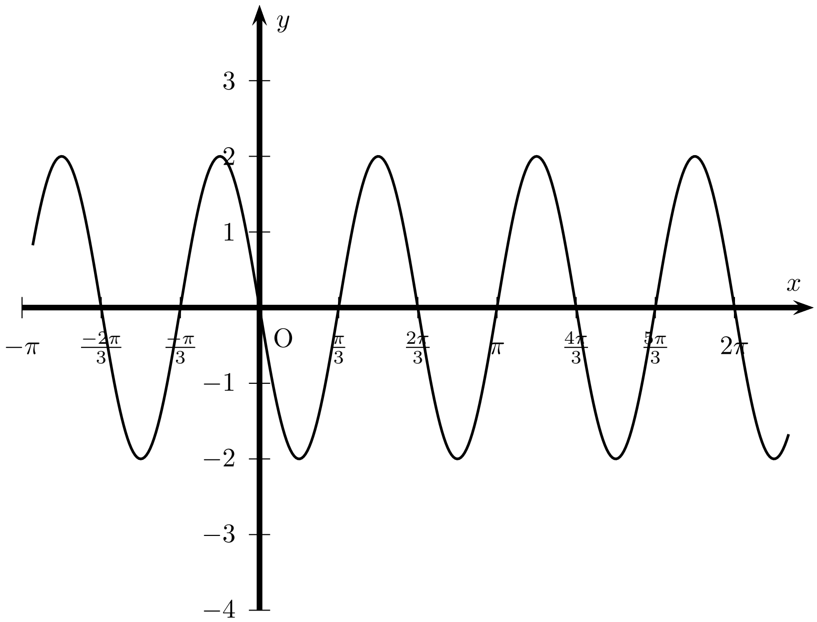
Aufgabe 6

Amplitude $a = 2$

Periode $p = \frac{\pi}{2}$, also $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

$f(x) = 2 \cdot \sin(4x)$

Aufgabe 7



Nullstellen: $x_k = \frac{\pi}{3} \cdot k, \;\; k \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 8

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 \cdot b^t \\ N(6) &= 10N_0 \\ N_0 \cdot b^6 &= 10N_0 \\ b^6 &= 10 \\ b &= \sqrt[6]{10} = 1,47 \\ N(0,25) &= N_0 \cdot 1,47^{0,25} \approx 1,101 \end{aligned}$$

Zunahme um ca. $10,1\%$

Aufgabe 9

$f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2x^2 - x}$

$2x^2 - x = x(2x - 1)$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 0,5\}$

$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

Nullstellen -3 und 3.

senkrechte Asymptoten $x = 0$ und $x = 0,5$.

Aufgabe 10

$$f(x) = \frac{-x^2 - 2x + 8}{2x + 10}$$

a) Keine Symmetrie, da gerade und ungerade Potenzen von x

Oder: $f(-x) \neq \pm f(x)$

b) Nullstellen:

$f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x = x(4x^2 + 5x - 6)$

$x = 0$ oder $4x^2 + 5x - 6 = 0$

Lösen der Gleichung: $4x^2 + 5x - 6 = 0$ $D = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6) = 25 + 96 = 121$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 4} = \frac{-5 \pm 11}{8} \Longrightarrow x = \frac{3}{4}$ oder $x = -2$

Nullstellen sind $-2; 0; \frac{3}{4}$.

Schnittpunkte mit der x-Achse: $S_{X1}(-2|0)$, $\quad S_{X2}(\frac{3}{4}|0)$

Schnittpunkt mit beiden Koordinatenachsen: $S(0|0)$

c) Ganzrationale Funktion ungeraden Grades (3) mit positivem Leitkoeffizienten (4), also $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

und $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

d) $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x$

$f'(x) = 12x^2 + 10x - 6 = 2(6x^2 + 5x - 3)$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 6x^2 + 5x - 3 = 0$

$D = 5^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3) = 25 + 72 = 97$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{97}}{2 \cdot 6} = \frac{-5 \pm \sqrt{97}}{12}$

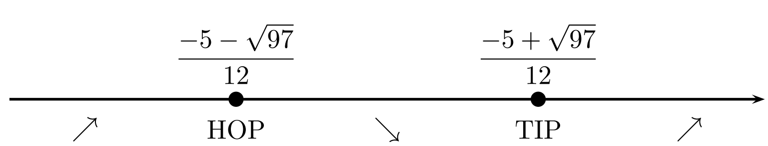
$x_{E1} = \frac{-5 - \sqrt{97}}{12} \approx -1,24$

$x_{E2} = \frac{-5 + \sqrt{97}}{12} \approx 0,40$

Nebenrechnungen z.B.

$f'(-2) > 0; f'(0) < 0; f'(1) > 0;$

Monotonieverhalten:



N.R.:

$f\left(\dfrac{-5-\sqrt{97}}{12}\right) \approx 7,5$

$f\left(\dfrac{-5+\sqrt{97}}{12}\right) \approx -1,34$

Ergebnis (Koordinaten gerundet):

$HOP(-1,24|7,5);\quad TIP(0,40|-1,34)$

e) $f'(x) = 12x^2 + 10x - 6$

$f''(x) = 24x + 10$

$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -\dfrac{10}{24} \Longleftrightarrow x = -\dfrac{5}{12}$

f'' hat an der Stelle $x_W - \dfrac{5}{12} \approx -0,42$ einen Vorzeichenwechsel (von $-$ zu $+$), also ist x_W eine Wendestelle.

N.R.: $f\left(-\frac{5}{12}\right) \approx 3,08$

Wendepunkt $WEP(-0,42|3,08)$

f) NR: $f(-2) = 0$ und $m = f'(-2) = 22$

Tangentengleichung: $y = mx + t$

Einsetzen: $0 = 22 \cdot (-2) + t$

$t = 44$

Gleichung der Tangente: $y = 22x + 44$

g) Graph: